

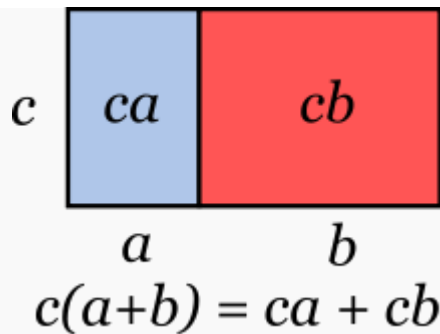
# PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

universodenumeros.wikispaces.com

**Productos notables** es el nombre que reciben aquellas [multiplicaciones](#) con [expresiones algebraicas](#) cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, sin verificar la multiplicación que cumplen ciertas reglas fijas. Su aplicación simplifica y sistematiza la resolución de muchas multiplicaciones habituales.

Cada producto notable corresponde a una fórmula de [factorización](#). Por ejemplo, la factorización de una diferencia de cuadrados perfectos es un producto de dos binomios conjugados y recíprocamente.

## Factor común



Representación gráfica de la regla de *factor común*.

El resultado de multiplicar un binomio  $a+b$  con un término  $c$  se obtiene aplicando la [propiedad distributiva](#):

$$c(a+b) = ca + cb$$

Esta operación tiene una interpretación geométrica ilustrada en la figura. El área del rectángulo es

$c(a+b)$  (el producto de la base por la altura), que también puede obtenerse como la suma de las dos áreas coloreadas ( $ca$ ) y ( $cb$ ).

### Ejemplo

$$3x(4x + 6y) = 12x^2 + 18xy$$

## Binomio al cuadrado o cuadrado de un binomio

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + ab + ab \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Ilustración gráfica del *binomio al cuadrado*.

Para elevar un binomio al cuadrado (es decir, multiplicarlo por sí mismo), se suman los cuadrados de cada término con el doble del producto de ellos. Es decir:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Un trinomio de la forma:  $a^2 + 2ab + b^2$ , se conoce como **trinomio cuadrado perfecto**.

Cuando el segundo término es negativo, la ecuación que se obtiene es:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

En ambos casos el tercer término tiene siempre signo positivo.

### Ejemplo

$$(2x - 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-3y) + (-3y)^2$$

Simplificando:

$$(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

## Producto de dos binomios con un término común

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= \\ &= x^2 + (a+b)x + ab\end{aligned}$$

Ilustración gráfica del producto de binomios con un término común

Cuando se multiplican dos binomios que tienen un término común, se suma el cuadrado del término común con el producto el término común por la suma de los otros, y al resultado se añade el producto de los términos diferentes.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

**Ejemplo**

$$(3x + 4)(3x - 7) = (3x)(3x) + (3x)(-7) + (3x)(4) + (4)(-7)$$

Agrupando términos:

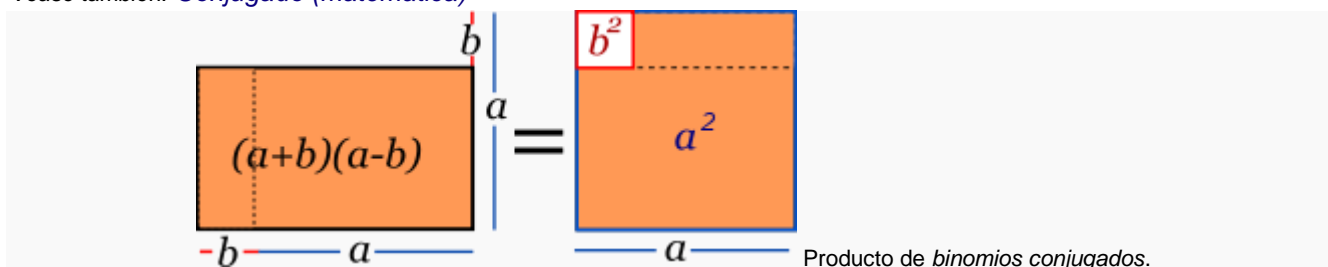
$$(3x + 4)(3x - 7) = 9x^2 - 21x + 12x - 28$$

Luego:

$$(3x + 4)(3x - 7) = 9x^2 - 9x - 28$$

## Producto de dos binomios conjugados

Véase también: [Conjugado \(matemática\)](#)



Dos **binomios conjugados** son aquellos que sólo se diferencien en el signo de la operación. Para multiplicar binomios conjugados, basta elevar los monomios al cuadrado y restarlos, obteniendo una **diferencia de cuadrados**

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

**Ejemplo**

$$\begin{aligned} (3x + 5y)(3x - 5y) &= \\ (3x)(3x) + (3x)(-5y) + (5y)(3x) + (5y)(-5y) \end{aligned}$$

Agrupando términos:

$$(3x + 5y)(3x - 5y) = 9x^2 - 25y^2$$

A este producto notable también se le conoce como **suma por la diferencia**.

## Polinomio al cuadrado

$ac$	$bc$	$c^2$
$ab$	$b^2$	$bc$
$a^2$	$ab$	$ac$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

Elevando un trinomio al cuadrado de forma gráfica

Para elevar un polinomio con cualquier cantidad de términos, se suman los cuadrados de cada término individual y luego se añade el doble de la suma de los productos de cada posible par de términos.

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$
$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

### Ejemplo

$$(3x+2y-5z)^2 = (3x+2y-5z)(3x+2y-5z)$$

Multiplicando los [monomios](#):

$$(3x+2y-5z)^2 = 3x \cdot 3x + 3x \cdot 2y + 3x \cdot (-5z) \\ + 2y \cdot 3x + 2y \cdot 2y + 2y \cdot (-5z) \\ + (-5z) \cdot 3x + (-5z) \cdot 2y + (-5z) \cdot (-5z)$$

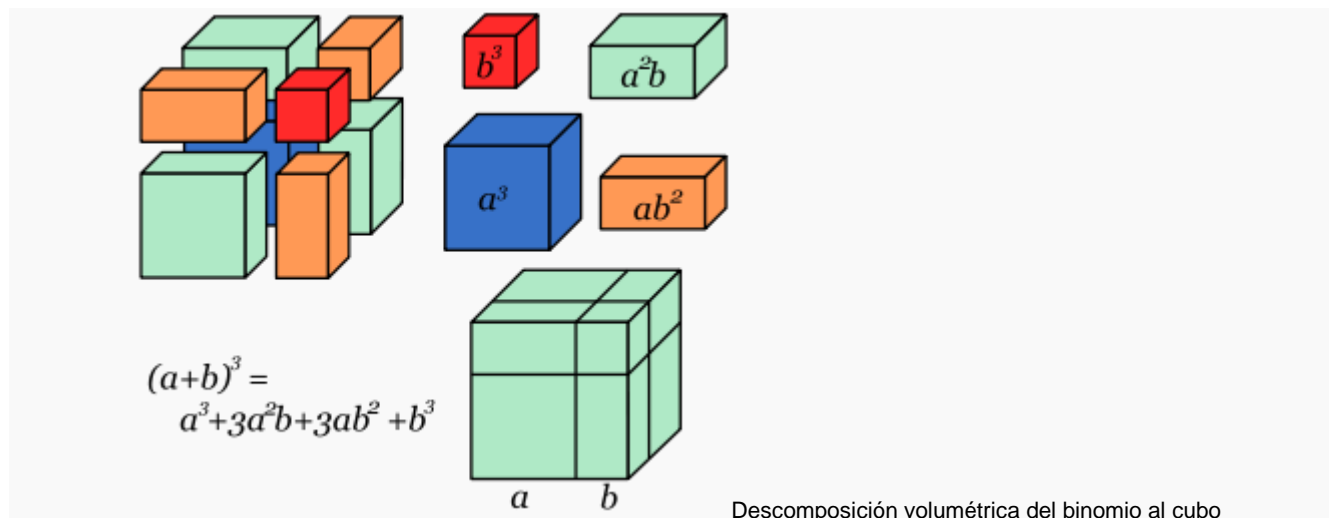
Agrupando términos:

$$(3x+2y-5z)^2 = 9x^2 + 4y^2 + 25z^2 + 2(6xy - 15xz - 10yz)$$

Luego:

$$(3x+2y-5z)^2 = 9x^2 + 4y^2 + 25z^2 + 12xy - 30xz - 20yz$$

## Binomio al cubo o cubo de un binomio



Para calcular el cubo de un binomio, se suma: el cubo del primer término, con el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Cuando la operación del binomio es resta, el resultado es: el cubo del primer término, *menos* el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, *menos* el cubo del segundo término.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

## COCIENTES NOTABLES.

*Cociente de la suma de el cubo de dos cantidades entre la suma de estas cantidades.*

Veamos la división de manera general:

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = \begin{array}{r} x^3 \qquad \qquad + y^3 \quad |x + y \\ x^3 + x^2y \quad \quad \quad x^2 - xy + y^2 \\ \hline -x^2y \qquad \qquad + y^3 \\ -x^2y - xy^2 \qquad \quad \\ \hline xy^2 + y^3 \\ \hline xy^2 + y^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

El producto notable nos queda:

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2$$

Y se enuncia: el cociente de la suma del cubo de dos cantidades dividida entre la suma de estas cantidades es igual al cuadrado de la primera menos el producto de estas, más el cuadrado de la segunda.

Ejemplos:

$$\frac{27x^3 + 343m^3}{3x + 7m} = 9x^2 - (3x)(7m) + 49m^2 = 9x^2 - 21xm + 49m^2$$

$$\frac{125m^3 + 512n^6}{5m + 8n^2} = 25m^2 - (5m)(8n^2) + 64n^4 = 25m^2 - 40mn^2 + 64n^4$$

*Cociente de la diferencia de el cubo de dos cantidades entre la diferencia de estas cantidades.*

Veamos la división de manera general:

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = \begin{array}{r} x^3 \qquad \qquad - y^3 \quad |x - y \\ x^3 - x^2y \quad \quad \quad x^2 + xy + y^2 \\ \hline x^2y \qquad \qquad - y^3 \\ x^2y - xy^2 \qquad \quad \\ \hline xy^2 - y^3 \\ \hline xy^2 - y^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

El producto notable nos queda:

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$$

Y se enuncia: el cociente de la diferencia del cubo de dos cantidades dividida entre la diferencia de estas cantidades es igual al cuadrado de la primera más el producto de estas, más el cuadrado de la segunda.

Ejemplos:

$$\frac{64s^3 - 27k^3}{4s - 3k} = 16s^2 + (4s)(3k) + 3k^2 = 16s^2 + 12sk + 3k^2$$

$$\frac{(x+y)^3 - (12x^2)^3}{(x+y) - 12x^2} = (x+y)^2 + (x+y)(12x^2) + (12x^2)^2$$

Como se ve en el último ejemplo no existe ningún problema si en vez de un factor se coloca un polinomio (esto es para cualquiera de las operaciones notables).

### ***Cociente de la diferencia de potencias iguales entre la diferencia de sus bases.***

La diferencia de dos potencias de exponentes iguales, ya sea pares o impares, siempre es divisible entre la diferencia de sus bases.

$$\begin{array}{r} \frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{a^n}{a - b} - \frac{a^{n-1}b}{a - b} \\ \frac{a^{n-1}b}{a - b} - \frac{a^{n-1}b}{a - b} + \frac{a^{n-2}b^2}{a - b} \\ \frac{a^{n-2}b^2}{a - b} - \frac{a^{n-2}b^2}{a - b} + \frac{a^{n-3}b^3}{a - b} \\ \frac{a^{n-3}b^3}{a - b} - \frac{a^{n-3}b^3}{a - b} + \frac{a^{n-4}b^4}{a - b} \\ \vdots \\ \frac{a^{n-1}b^{n-1}}{a - b} - \frac{a^{n-1}b^{n-1}}{a - b} + \frac{a^{n-1}b^{n-1}}{a - b} \\ \frac{0}{0} \end{array}$$

Como se demuestra en la división mostrada no importa que exponente sea usado el resultado siempre será exacto.

Para escribir el resultado se siguen los siguientes pasos:

1. Existirá un número de términos igual al exponente de los términos del dividendo y todos serán positivos.
2. En cada término se multiplicara el término de la izquierda por el término de la derecha de la expresión dada.
3. En el primer término el factor de la izquierda tendrá un exponente igual al de el dividendo disminuido en uno, y el factor de la izquierda tendrá un exponente de cero.
4. Para los exponentes de los siguientes términos, en el caso del término de la izquierda irán disminuyendo en una unidad, y los del término de la derecha irán aumentando también en una unidad (si se suman los exponentes de los dos términos siempre será igual a n-1)
5. Cuando el exponente del término de la derecha sea igual a n-1 damos por terminada la respuesta.

Ejemplos:

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

$$\frac{128x^7 - m^7}{2x - m} = (2x)^6(m)^0 + (2x)^5(m)^1 + (2x)^4(m)^2 + (2x)^3(m)^3 + (2x)^2(m)^4 + (2x)^1(m)^5 + (2x)^0(m)^6$$

$$\frac{128x^7 - m^7}{2x - m} = 64x^6 + 32x^5m + 16x^4m^2 + 8x^3m^3 + 4x^2m^4 + 2xm^5 + m^6$$

De la misma manera que se demuestra y trabaja este cociente se demuestran otros que simplemente resumiremos a continuación:

### ***Suma de potencias iguales impares entre la suma de sus bases***

La suma de potencias de exponentes iguales **impares** siempre es divisible exactamente entre la suma de sus bases. Se estructura igual que el anterior con la siguiente diferencia en el paso uno

1. El primer factor del resultado será positivo el segundo negativo y de esta manera seguirán alternándose hasta terminar el polinomio.

Ejemplos:

$$\frac{x^7 + y^7}{x + y} = x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6$$

$$\frac{32x^5 + 243y^5}{2x + 3y} = (2x)^4(3y)^0 - (2x)^3(3y)^1 + (2x)^2(3y)^2 - (2x)^1(3y)^3 + (2x)^0(3y)^4$$

$$\frac{32x^5 + 243y^5}{2x + 3y} = 16x^4 - 24x^3y + 36x^2y^2 - 54xy^3 + 81y^4$$

### ***Diferencia de potencias iguales pares entre la suma de sus bases***

La diferencia de potencias de exponentes iguales **pares** siempre es divisible exactamente entre la suma de sus bases. Se estructura exactamente igual que el anterior sin diferencias.

$$\frac{x^8 - y^8}{x + y} = x^7 - x^6y + x^5y^2 - x^4y^3 + x^3y^4 - x^2y^5 + xy^6 - y^7$$

$$\frac{16x^8 - 625y^4}{2x^2 + 5y} = (2x^2)^3(5y)^0 - (2x^2)^2(5y)^1 + (2x^2)^1(5y)^2 - (2x^2)^0(5y)^3$$

$$\frac{16x^8 - 625y^4}{2x^2 + 5y} = 8x^6 - 20x^4y + 50x^2y^2 - 125y^3$$



## FÓRMULA DE LOS COCIENTES NOTABLES

Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades **entre** la suma de las cantidades

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades **entre** la diferencia de las cantidades

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

Cociente de la suma de los cubos de dos cantidades **entre** la suma de las cantidades

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$$

Cociente de la diferencia de los cubos de dos cantidades **entre** la diferencia de las cantidades

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$$